Primeira Prova de Teoria Eletromagnética I, 05/04/2010

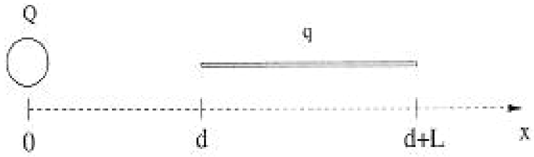
Nome: GABARITO

(1ª questão)

A figura abaixo mostra uma esfera de carga $Q > 0$ e uma barra fina de carga $q > 0$ alinhada radialmente em relação à esfera. A esfera possui densidade volumétrica de carga constante. A barra possui densidade linear de carga constante, comprimento L e sua extremidade mais próxima se encontra à distância d do centro da esfera.

(a) *(2,0 pontos)* Calcule o vetor força elétrica produzido pela esfera sobre ~~o cilindro~~ a barra.

(b) *(0,5 ponto)* Explique como poderíamos obter essa mesma força elétrica usando duas cargas pontuais estáticas de cargas Q e q, respectivamente.

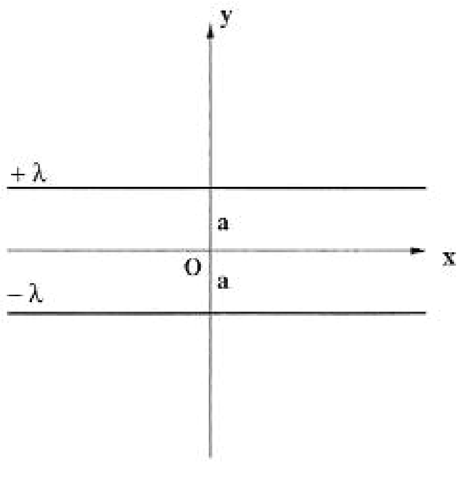


(2ª questão)

Dois fios infinitamente longos estão dispostos no plano xy paralelos ao eixo x, conforme a figura abaixo. Os fios possuem densidades de carga constantes e opostas, dadas por $+\lambda$ e $-\lambda$. Eles estão simetricamente dispostos em relação à origem e separados por uma distância $2a$.

(a) *(1,0 ponto)* Determine o campo elétrico em qualquer ponto do plano xy externo aos fios.

(b) *(1,5 pontos)* Determine o potencial em qualquer ponto do plano xy externo aos fios usando a origem da figura como "zero" do potencial.



(3ª questão) *(2,5 pontos)*

Considere a expressão para a energia eletrostática em termos da distribuição de carga

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}\,') \, V(\vec{r}\,') \, dv', \tag{1}$$

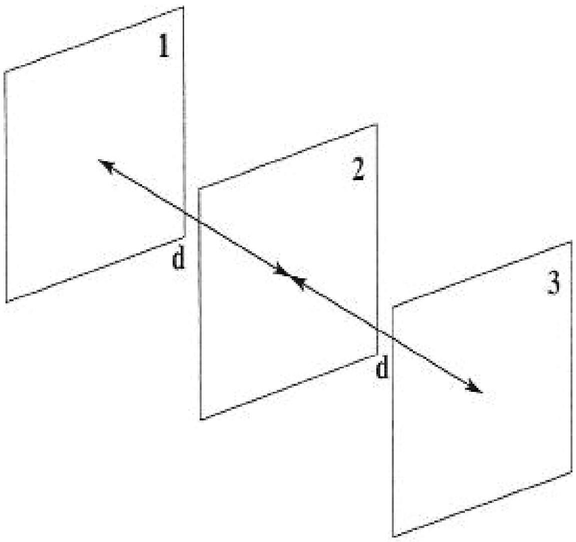
onde $\mathcal{V}$ é um volume contendo a distribuição de carga de densidade volumétrica $\rho(\vec{r}\,')$ e $V(\vec{r}\,')$ é o potencial eletrostático, com $\vec{r}\,'$ denotando os vetores posição associados aos pontos do espaço englobados por $\mathcal{V}$. Partindo da Eq. (1), mostre que a energia U pode ser escrita, para uma escolha conveniente de $\mathcal{V}$, em termos do campo elétrico gerado pela distriuição de carga como

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} E^2(\vec{r}\,') \, dv'. \tag{2}$$

Durante sua demonstração, especifique a escolha do volume $\mathcal{V}$.

(4ª questão) *(2,5 pontos)*

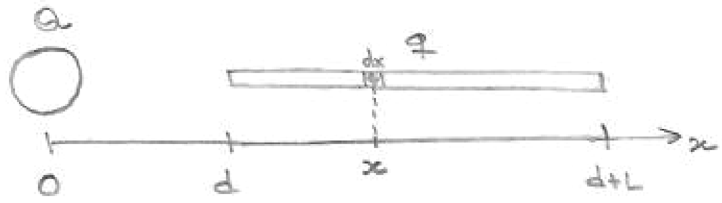
Três placas quadradas (cada uma com área A) são postas em fila separadas por distâncias d, conforme esquematizado na figura abaixo. Considere que cada placa seja carregada uniformemente com carga Q. Determine a pressão eletrostática em cada uma das três placas. Suponha que as placas sejam grandes o suficiente comparadas à distância d para que possamos tomá-las como placas infinitas.



Teoria Eletromagnética I - 2010/1

PROVA 1 - GABARITO

(1ª Questão)



Barra → $q = \lambda L$ ⇒ $\boxed{\lambda = q/L}$

constante.

(a)

Esfera → Para pontos externos, comporta-se como se toda a sua carga estivesse no centro ⇒ Podemos substituí-la por uma carga pontual Q.

Barra → Temos que integrar ao longo da barra.

Para um elemento dx da barra na posição x temos:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q\,(\lambda dx)}{x^2}$$

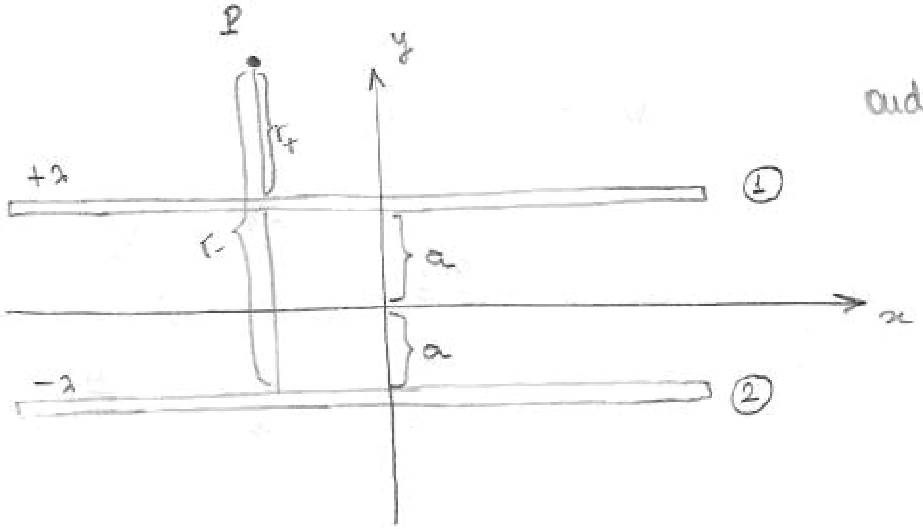
Integrando: $$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{\lambda Q\, dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lambda Q \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_d^{d+L}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{L} Q \left[-\frac{1}{d+L} + \frac{1}{d}\right] = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 L} \left(\frac{-\cancel{d}+\cancel{d}+L}{d(d+L)}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{d(d+L)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{d(d+L)}\, \hat{\imath}}$$ → Vetor força elétrica produzida pela esfera sobre o cilindro

(b) Para obtermos $\vec{F}$ usando 2 cargas pontuais, tudo o que teríamos que fazer é mantê-las posicionadas a uma distância $\boxed{r = \sqrt{d(d+L)}}$ uma da outra.

(2ª Questão)



onde $\boxed{\begin{array}{l} r_+ = y - a \\ r_- = y + a \end{array}}$

a) $\underline{\underline{\vec{E}_1}}$: $\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1\, 2\pi r_+ \cancel{\ell} = \frac{\lambda \cancel{\ell}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_+} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y-a}$

$\underline{\underline{\vec{E}_2}}$: $\oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2\, 2\pi r_- \cancel{\ell} = \frac{-\lambda \cancel{\ell}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_-} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y+a}$

→ Compon. dos campos na direção radial.

onde S é uma superfície Gaussiana cilíndrica ao redor da linha de carga.

Do princípio da superposição, temos que o campo total é:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{y-a}\hat{j} - \frac{1}{y+a}\hat{j}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(\cancel{y}+a)-(\cancel{y}-a)}{y^2-a^2}\hat{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{y^2-a^2}\hat{j}}$$ → campo elétrico p/ qualquer ponto do plano xy externo às linhas de carga (ou seja $y \neq \pm a$).

b) Para o cilindro 1 temos: $V_1 = -\int_a^{r_+} E_1\, d\ell = -\int_a^{r_+} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,dr = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_+}{a}\right)$

Para o cilindro 2 temos: $V_2 = -\int_a^{r_-} E_2\, d\ell = -\int_a^{r_-}\left(\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}\,dr = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_-}{a}\right)$

Potencial total: $V = V_1 + V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{y+a}{y-a}\right)}$

(3ª Questão)

$$U = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}\,')\, V(\vec{r}\,')\, dv'$$

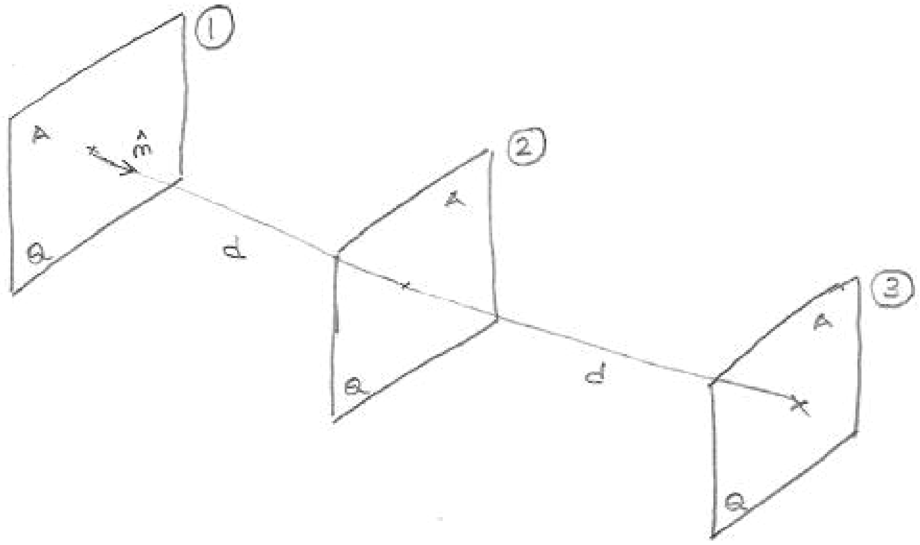
$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, V\, dv' = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}V)\, dv' - \int_{\mathcal{V}} \vec{E}\cdot\vec{\nabla}V\, dv'\right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Teorema}\\ \text{de Gauss}}}{=} \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Superfície}\\ \text{que engloba } \mathcal{V}}}{\oint_S} (\vec{E}V)\cdot\hat{n}\, da' + \int_{\mathcal{V}} E^2\, dv'\right]$$

Especificamos $\mathcal{V}$ como sendo <u>todo o espaço</u>, ou seja, $\mathcal{V} \to \infty$.
Nesse caso S é uma superfície fechada no infinito. No entanto,
$EV \sim 1/r^3$ e $da' \sim r^2$ $\Rightarrow$ $\oint_S (\vec{E}V)\cdot\hat{n}\, da' \longrightarrow 0$ qdo $\mathcal{V} \to \infty$.

Assim: $\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} E^2(\vec{r}\,')\, dv'}$, com $\mathcal{V}$ englobando <u>todo o espaço</u>.

(4ª Questão)



Para cada placa:

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{A}}$$

Campo p/ cada placa é o campo do plano infinito: $\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

Ao redor da placa 1:

Direita: $\vec{E}_D^{(1)} = \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}} - \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

Esquerda: $\vec{E}_E^{(1)} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} = -\frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

$$\boxed{\vec{E}_m^{(1)} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

Ao redor da placa 2:

Direita: $\vec{E}_D^{(2)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} + \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}} - \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

Esquerda: $\vec{E}_E^{(2)} = \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}} - \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

$$\boxed{\vec{E}_m^{(2)} = 0}$$

Ao redor da placa 3:

Direita: $\vec{E}_D^{(3)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

Esquerda: $\vec{E}_E^{(3)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} + \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}} - \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

$$\boxed{\vec{E}_m^{(3)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

Pressão eletrostática:

$$P_1 = \sigma E_m^{(1)} \Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}} \quad \text{ou} \quad \boxed{P_1 = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A^2}}$$

$$P_2 = \sigma E_m^{(2)} \Rightarrow \boxed{P_2 = 0}$$

$$P_3 = \sigma E_m^{(3)} \Rightarrow \boxed{P_3 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}} \quad \text{ou} \quad \boxed{P_3 = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A^2}}$$

——— // ——— // ———